

ΜΑΘΗΜΑ 14

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μονοτονία συνάρτησης

Ακρότατα συνάρτησης

Θεωρία – Σχόλια – Μέθοδοι – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ** , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

2.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα**, όταν είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

3.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα σε διάστημα Δ** , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

4.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα**, όταν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

5.

Ορισμός

Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε διάστημα Δ , λέγεται **γνησίως μονότονη στο Δ** .

6.

Άμεση συνέπεια

Η γραφική παράσταση γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη του άξονα $x'x$ το πολύ σ' ένα σημείο.

7.

Ορισμός

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **μέγιστο** το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

8.

Ορισμός

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ελάχιστο** το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Παρατήρηση

f γνησίως αύξουσα σημαίνει ότι, αυξανόμενου του x αυξάνεται και το $f(x)$.

2.

Στη γραφική παράσταση

Η γνησίως αύξουσα συνάρτηση σχεδιάζεται χαράζοντας δεξιά και πάνω.

3.

Παρατήρηση

f γνησίως φθίνουσα σημαίνει ότι, αυξανόμενου του x ελαττώνεται το $f(x)$.

4.

Στη γραφική παράσταση

Η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση σχεδιάζεται χαράζοντας δεξιά και κάτω.

5.

Προσοχή

Αν f γνησίως μονότονη σε δύο διαστήματα, δε σημαίνει ότι είναι και στην ένωσή τους.

6.

Σημαντική ιδιότητα

Αν f γνησίως μονότονη συνάρτηση, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

7.

Σημαντική ιδιότητα

Αν f γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

8.

Σημαντική ιδιότητα

Αν f γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

9.

Τομή με τον άξονα $x'x$

Η γραφική παράσταση γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

10.

Ρίζα

Αν f γνησίως μονότονη συνάρτηση, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

11.

Οι δύο αριθμοί του ακρότατου

Στο μέγιστο συνάρτησης f λειτουργούν δύο αριθμοί :

- α) η τιμή x_0 του x , που καθορίζει τη θέση του μέγιστου ως προς το αριστερά – δεξιά
- β) η τιμή $f(x_0)$, που καθορίζει τη θέση του μέγιστου ως προς το πάνω – κάτω.

Ομοίως για το ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν f γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να λυθεί η ανίσωση
 $f(\lambda^2 + 3) < f(4\lambda)$

Προτεινόμενη λύση

Γνωρίζουμε ότι: Αν f γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(\lambda^2 + 3) < f(4\lambda) \Leftrightarrow \lambda^2 + 3 < 4\lambda$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 < 0$$

$$1 < \lambda < 3$$

Σχόλιο 7

2.

Αν f γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να λυθεί η εξίσωση
 $f(3\mu - 1) = f(5\mu + 9)$ και η ανίσωση $f(3\mu - 1) > f(5\mu + 9)$.

Προτεινόμενη λύση

Αφού f γνησίως φθίνουσα, θα έχουμε

$$f(3\mu - 1) = f(5\mu + 9) \Leftrightarrow 3\mu - 1 = 5\mu + 9$$

$$-10 = 2\mu$$

$$\mu = -5$$

Σχόλιο 6

Αφού f γνησίως φθίνουσα, θα έχουμε

$$f(3\mu - 1) > f(5\mu + 9) \Leftrightarrow 3\mu - 1 < 5\mu + 9$$

$$-10 < 2\mu$$

$$\mu > -5$$

Σχόλιο 8

3.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα με $f(2) = 2$.

i) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f(x^2 + 1)\right) > 2$

iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(2)$$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ii)

$$f\left(f(x^2 + 1)\right) > 2 \Leftrightarrow f\left(f(x^2 + 1)\right) > f(2)$$

$$f(x^2 + 1) > 2$$

$$f(x^2 + 1) > f(2)$$

$$x^2 + 1 > 2$$

$$x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

iii)

$$\text{Πρέπει } f(x) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$$

$$f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2$$

4.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα με $f(2) = 2$ και μιγαδικός z .

i) Αν $f\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) = 2$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z .

ii) Αν $f\left(f(|z|^2 + 1)\right) > 2$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στο εξωτερικό γνωστού κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) = 2 \Leftrightarrow f\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) = f(2)$$

$$|z| + \frac{1}{|z|} = 2$$

Σχόλιο 6

$$|z|^2 + 1 = 2|z|$$

$$|z|^2 - 2|z| + 1 = 0$$

$$(|z| - 1)^2 = 0$$

$$|z| - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

Επομένως, ο γ.τόπος της εικόνας του z είναι ο κύκλος $(O, 1)$

ii)

$$f\left(f(|z|^2 + 1)\right) > 2 \Leftrightarrow f\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right) > f(2)$$

Σχόλιο 7

$$|z| + \frac{1}{|z|} > 2 \quad \kappa. \lambda. \pi$$

5.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα.

i) Αποδείξτε ότι η fof είναι γνησίως αύξουσα

ii) Αποδείξτε την ισοδυναμία: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

iii) Αν επί πλέον $f(1) = 1$ λύστε την εξίσωση $(\text{fof})(2x + 5) = 1$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

f γν. αύξουσα $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

$(\text{fof})(x_1) < (\text{fof})(x_2)$ άρα fof γνησίως αύξουσα

ii)

Ευθύ: Με υπόθεση $x_1 = x_2$, θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$

Είναι προφανές από τον ορισμό της συνάρτησης.

Αντίστροφο: Με υπόθεση $f(x_1) = f(x_2)$ θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Αν ήταν $x_1 \neq x_2$ (έστω $x_1 < x_2$), επειδή f γν. αύξουσα θα ήταν $f(x_1) < f(x_2)$ που είναι άτοπο.

iii)

$$(\text{fof})(2x + 5) = 1 \Leftrightarrow f(f(2x + 5)) = f(1)$$

$$f(2x + 5) = 1 \quad \text{αλλά} \quad 1 = f(1)$$

$$f(2x + 5) = f(1)$$

$$2x + 5 = 1$$

$$2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

6.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα

i) Αποδείξτε ότι η fof είναι γνησίως αύξουσα

ii) Αποδείξτε την ισοδυναμία: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

iii) Αν επί πλέον $f(2) = 2$ λύστε την εξίσωση $(\text{fof})(x^2 - 7x + 12) = 2$

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 5

7.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα.

i) Αποδείξτε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα

ii) Αποδείξτε την ισοδυναμία: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

iii) Αν επί πλέον $f(-1) = -1$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 - 5) + 1}.$$

Προτεινόμενη λύση

i)

Άσκηση 5

ii)

Ευθύ: Με υπόθεση $x_1 < x_2$ θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Είναι προφανές, αφού f γν. αύξουσα

Αντίστροφο: Με υπόθεση $f(x_1) < f(x_2)$ θα αποδείξουμε ότι $x_1 < x_2$.

Αν ήταν $x_1 \geq x_2$, επειδή f γν. αύξουσα θα ήταν $f(x_1) \geq f(x_2)$ που είναι άτοπο.

iii)

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } f(x^2 - 5) + 1 &\geq 0 &\Leftrightarrow & f(x^2 - 5) \geq -1 \\ & & & f(x^2 - 5) \geq f(-1) \\ & & & x^2 - 5 \geq -1 \\ & & & x^2 \geq 4 \\ & & & x \leq -2 \quad \text{ή} \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

8.

Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(6-x) + f(4+x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρεθεί η τιμή $f(5)$.
- ii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + 3x + 7) > 0$.
- iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 1, \text{ η υπόθεση } f(6-x) + f(4+x) &= 0 \Rightarrow \\ f(6-1) + f(4+1) &= 0 \\ f(5) + f(5) &= 0 \\ 2f(5) &= 0 \Rightarrow f(5) = 0 \end{aligned}$$

Δημιουργούμε
ίδιους προσθετέους

ii)

$$\begin{aligned} f(x^2 + 3x + 7) > 0 &\Rightarrow f(x^2 + 3x + 7) > f(5) \\ x^2 + 3x + 7 &> 5 \\ x^2 + 3x + 2 &> 0 \\ x < -2 \quad \text{ή} \quad x &> -1 \end{aligned}$$

Σχόλιο 7

iii)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(5) \Leftrightarrow x = 5$$

Σχόλιο 6

9.

Έστω γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(8-x) + f(4+x) = -10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρεθεί η τιμή $f(6)$.
- ii) Να λυθεί η ανίσωση $f(2x+10) + 5 > 0$.
- iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + 5 = 0$.

Υπόδειξη

Για $x = 2 \Rightarrow \dots\dots\dots$ και ακολουθούμε την άσκηση 8

10.

i) Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες, να αποδείξετε ότι και το άθροισμά τους είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$ είναι γν. φθίνουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x(x+3) > 1$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

$$f \text{ γνησίως φθίνουσα} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (1)$$

$$g \text{ γνησίως φθίνουσα} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$$

$$(f+g)(x_1) > (f+g)(x_2) \Rightarrow f+g \text{ γνησίως φθίνουσα.}$$

ii)

$$\text{Είναι } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + (-x)$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σαν άθροισμα των συναρτήσεων

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ και } h(x) = -x, \text{ που είναι γνησίως φθίνουσες.}$$

iii)

$$\text{Η ανίσωση } 2^x(x+3) > 1 \text{ γράφεται } x+3 > \frac{1}{2^x}$$

$$x+3 > \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$3 > \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$$

$$3 > f(x) \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 1 = 2 + 1 = 3$$

(συνήθως δοκιμάζουμε τις τιμές $0, \pm 1, \pm e, \pm \frac{1}{e}$)

Οπότε η (1) γράφεται $f(-1) > f(x) \Leftrightarrow -1 < x$ αφού f γνησίως φθίνουσα.

11.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2^x - 5^{x+1}}{3^{x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(4^x) > f(5 \cdot 2^{x+1} - 16)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η f γράφεται $f(x) = \frac{2^x - 5 \cdot 5^x}{3^2 3^x}$

$$f(x) = \frac{2^x}{3^2 3^x} - \frac{5 \cdot 5^x}{3^2 3^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{9} \frac{2^x}{3^x} - \frac{5}{9} \frac{5^x}{3^x}$$

$$f(x) = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{5}{9} \left(\frac{5}{3}\right)^x$$

Επειδή $\frac{2}{3} < 1$, η συνάρτηση $\omega(x) = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $\frac{5}{3} > 1$, η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{5}{9} \left(\frac{5}{3}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $-\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα σαν άθροισμα δύο συναρτήσεων, που είναι γνησίως φθίνουσες.

ii)

$$f(4^x) > f(5 \cdot 2^{x+1} - 16) \Leftrightarrow 4^x < 5 \cdot 2^{x+1} - 16$$

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2 \cdot 2^x + 16 < 0$$

$$(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 < 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $2^x = \lambda > 0$, οπότε η (1) γίνεται $\lambda^2 - 10\lambda + 16 < 0$

$$2 < \lambda < 8$$

$$2 < 2^x < 8$$

$$2^1 < 2^x < 2^3$$

$$1 < x < 3$$

12.

Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες.

i) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα

iii) Αν, επί πλέον ισχύει $f(0) = g(0) = 0$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$(f \circ g)(x) = f(x) + g(x) \text{ έχει μοναδική λύση.}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

Βλέπε άσκηση 10.i)

ii)

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

g γν. φθίνουσα $\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ και επειδή

f γν. φθίνουσα $\Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ άρα $f \circ g$ γνησίως αύξουσα.

iii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$(f \circ g)(x) - [f(x) + g(x)] = 0 \text{ έχει μοναδική λύση.}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\omega(x) = (f \circ g)(x) - [f(x) + g(x)]$.

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\omega(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

$$\text{Είναι } \omega(0) = (f \circ g)(0) - [f(0) + g(0)]$$

$$= f(g(0)) - [0 + 0]$$

$$= f(0) - 0$$

$$= 0 - 0 = 0, \text{ άρα το } 0 \text{ είναι λύση της εξίσωσης } \omega(x) = 0.$$

Επειδή η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα,

η $-(f + g)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε η $\omega(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των $f \circ g$, $-(f + g)$.

Επομένως, το 0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $\omega(x) = 0$.

13.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) Αν η συνάρτηση $g \circ f$ και η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσες, να αποδείξετε ότι και η f είναι γν. αύξουσα.
- ii) Αν $e^{f(x)} = 3^x + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι f γν. αύξουσα

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω ότι η f δεν είναι γν. αύξουσα.

Τότε θα υπάρχουν κάποια $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έτσι, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$

και επειδή g γν. αύξουσα θα είναι $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ **(1)**

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } x_1 < x_2 \text{ και } g \circ f \text{ γν. αύξουσα} &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Από τις (1), (2) έχουμε άτοπο.

Άρα f γν. αύξουσα.

ii)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $\kappa(x) = 3^x$, $\lambda(x) = x^3$ που είναι γν. αύξουσες

Θα είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)}$.

Η υπόθεση $e^{f(x)} = 3^x + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γίνεται

$$(g \circ f)(x) = \kappa(x) + \lambda(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις κ, λ είναι γν. αύξουσες, είναι και το άθροισμά τους

Άρα η $g \circ f$ γνησίως αύξουσα.

Σύμφωνα με το ερώτημα (i) $\Rightarrow f$ γν. αύξουσα.

14.

Έστω συνάρτηση f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι υπάρχει κάποιο x έτσι ώστε $f(x) \neq x$.

Ας είναι, λοιπόν, $f(x) < x$ **(1)**

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } f \text{ γν. αύξουσα, η (1)} &\Rightarrow f(f(x)) < f(x) \\ &x < f(x) \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Από τις (1), (2) έχουμε άτοπο.

Άρα $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15.

Αν για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right) = x$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη.

Ακολουθήσε την άσκηση 14, θέτοντας όπου x το $\frac{x+f(x)}{2}$

16.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν f γν. φθίνουσα και $f(g(x)) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η g είναι γν. φθίνουσα.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι η g δεν είναι γν. φθίνουσα.

Τότε θα υπάρχουν κάποια $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έτσι, ώστε $g(x_1) \leq g(x_2)$.

Και επειδή f γν. φθίνουσα θα είναι $f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)) \Rightarrow$

$$2x_1 + 3 \geq 2x_2 + 3 \Rightarrow$$

$$x_1 \geq x_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

17.

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$ ή ότι $f(x_1) - f(x_2) < 0$

$$\text{Η υπόθεση} \Rightarrow f^3(x_1) + f(x_1) = x_1 \quad (1)$$

$$\text{και} \quad f^3(x_2) + f(x_2) = x_2 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow f^3(x_1) - f^3(x_2) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow$$

$$[f(x_1) - f(x_2)][f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)] + [f(x_1) - f(x_2)] = x_1 - x_2 < 0$$

$$[f(x_1) - f(x_2)][f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1] < 0 \quad (3)$$

Η παράσταση Π της δεύτερης αγκύλης είναι τριώνυμο ως προς $f(x_1)$,

$$\begin{aligned} \text{με διακρίνουσα} \quad \Delta &= f^2(x_2) - 4 \cdot 1 [f^2(x_2) + 1] \\ &= f^2(x_2) - 4f^2(x_2) - 4 \\ &= -3f^2(x_2) - 4 < 0 \end{aligned}$$

Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $a = 1$, δηλαδή $\Pi > 0$

$$\text{Η (3)} \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$$

18.

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f^3(x) + f(x) = 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη.

Ακολουθήστε την άσκηση 17.

19.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν f γν. φθίνουσα και $f(g(x+1)) \leq f(x) \leq f(g(x)+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της g .

Προτεινόμενη λύση

Αφού f γν. φθίνουσα και $f(g(x+1)) \leq f(x) \leq f(g(x)+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι $g(x+1) \geq x \geq g(x)+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **(1)**

Για $x+1 = u$ δηλαδή $x = u-1$,

$$\begin{aligned} \text{η (1)} &\Rightarrow g(u) \geq u-1 \geq g(u-1)+1 \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow g(x) \geq x-1 \geq g(x-1)+1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{Η δεξιά ανίσωση της (1)} \Rightarrow g(x) \leq x-1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \textbf{(3)}$$

$$\text{Η αριστερή ανίσωση της (2)} \Rightarrow g(x) \geq x-1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \textbf{(4)}$$

$$\text{Από τις (3), (4)} \Rightarrow g(x) = x-1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

20.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{6^x}{4^x + 9^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

i) η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$

ii) η τιμή $f(0)$ είναι μέγιστο.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \frac{1}{\frac{4^x}{6^x} + \frac{9^x}{6^x}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{9}{6}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}} \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια.

$$(1) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(-x) = f(x), \quad \text{άρα } f \text{ άρτια,} \\ \text{άρα συμμετρική ως προς τον άξονα } y'y$$

ii)

$$\text{Για } x=0 \text{ η } (1) \Rightarrow f(0) = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}} \leq \frac{1}{2}$$

$$2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$$

$$2 \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + 1$$

$$0 \leq \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$$

$$0 \leq \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right]^2 \quad \text{που ισχύει}$$